**Теорема об устойчивости по линейному приближению решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами**

**М.М. Васьковский, И.В. Качан (Минск, Беларусь)**

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + f(t, x(t), x_t)dt + g(t, x(t), x_t)dW(t), \tag{1}$$

с постоянным начальным условием $x(t) = \psi(t)$, $t \in [-h, 0]$, где $A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{d\times d}$ – ограниченная кусочно непрерывная функция, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times C_h \to \mathbb{R}^d$, $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times C_h \to \mathbb{R}^{d\times d}$ – измеримые по Борелю функции, $f(t, 0, 0) = 0$ и $g(t, 0, 0) = 0$ при всех $t \geqslant 0$, функции $f$ и $g$ имеют линейный порядок роста по $(x, \varphi)$; $x_t = \{x(t + \tau)| - h \le \tau \le 0\} \in C_h$, $C_h = C([-h, 0], \mathbb{R}^d)$, $h > 0$ – время запаздывания, $\psi(\cdot) \in C_h$, $W(t)$ – $d$-мерное броуновское движение.

Для каждого $(t, x, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times C_h$ построим множества $F(t, x, \varphi) = \cap_{\delta>0}\overline{\text{co}}[f(t, [x]_\delta, [\varphi]_\delta)]_\delta$, $G(t, x, \varphi) = \cap_{\delta>0}\overline{\text{co}}[g(t, [x]_\delta, [\varphi]_\delta)]_\delta$.

Если существуют: 1) вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\sigma$-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \geqslant -h$; 2) непрерывный $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс $x(t)$, $t \geqslant -h$; 3) $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение $W(t)$, $t \geqslant 0$, $W(0) = 0$ п. н.; 4) измеримые $(\mathcal{F}_t)$-согласованные процессы $v(t)$, $u(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$; такие, что выполняются условия: 1) $v(t) \in F(t, x(t), x_t)$, $u(t) \in G(t, x(t), x_t)$ для $(\mu \times P)$-почти всех $(t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$, где $\mu$ – мера Лебега на $\mathbb{R}^+$, и $\int_0^T (|v(s)| + |u(s)|^2)ds < \infty$ для всех $T \in \mathbb{R}^+$; 2) с вероятностью 1 для всех $t \ge -h$ выполняются равенства $x(t) = \psi(t),\ t \in [-h, 0]$, $x(t) = \psi(0) + \int_0^t v(s)ds + \int_0^t u(s)dW(s),\ t \geqslant 0$, то процесс $x(t)$, $t \ge -h$, называется *слабым решением* уравнения (1) с начальным условием $x(t) = \psi(t)$, $t \in [-h, 0]$.

Будем говорить, что нулевое решение уравнения (1) *асимптотически устойчиво по вероятности*, если: 1) для любых $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого слабого решения $x(t)$ уравнения (1) с постоянным начальным условием $x(t) = \psi(t)$, $t \in [-h, 0]$, такого, что $|\psi(0)| \leqslant \delta$, выполняется неравенство $\mathbb{P}\{\sup_{t\ge0} |x(t)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2$; 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого слабого решения $x(t)$ уравнения (1) с постоянным начальным условием $x(t) = \psi(t)$, $t \in [-h, 0]$, такого, что $|\psi(0)| \leqslant \delta$, выполняется неравенство $\mathbb{P}\{\lim_{t\to\infty} x(t) = 0\} \geqslant 1 - \varepsilon$.

Будем говорить, что уравнение $dx(t) = A(t)x(t)$ имеет *равномерно экспоненциально устойчивое* нулевое решение, если существуют константы $\Lambda, \lambda > 0$ такие, что для любых $(s, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ и любого решения $x(t)$ системы $dx(t) = A(t)x(t)$ с начальным условием $x(s) = x_0$ выполняется неравенство $|x(t)| \le \Lambda|x_0|e^{-\lambda(t-s)}$ при любых $t \ge s$.

**Теорема.** Предположим, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что выполняются неравенства $|f(t, x, \varphi)| \le \varepsilon|x|$, $|g(t, x, \varphi)| \le \varepsilon|x|$ для любых $x \in \mathbb{R}^d$, $|x| \le \delta$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in C_h$, а уравнение $dx(t) = A(t)x(t)$ имеет равномерно экспоненциально устойчивое нулевое решение. Тогда уравнение (1) имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение.